第 13 講　指数・対数関数の様々な問題

PART1　指数・対数と式の値

1 (1)　$16^{\log_2 3}$ の値を求めよ。

(2)　$2^x = 3^y = 12^z$，$xyz \neq 0$ のとき，$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

Point Pickup

(1)　$a > 0$，$a \neq 1$ で，$M > 0$ とするとき

$$a^p = M \Longleftrightarrow p = \log_a M$$

であるから，

$$a^{\log_a M} = M$$

(2)　$2^x = 3^y = 12^z$ の各辺の 2 を底とする対数をとる。

第13講　PART1　確認問題

1　$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log 5\frac{3}{2}}$ の値を求めよ。

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log 5\frac{3}{2}}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

2　$2^x=3^y=5^z=\sqrt[3]{30}$ のとき，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ の値を求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\boxed{ウ}$$

第 13 講　指数・対数関数の様々な問題

PART1　指数・対数と式の値

1　(1)　$16^{\log_2 3}$ の値を求めよ。

(2)　$2^x=3^y=12^z$，$xyz\neq 0$ のとき，$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$ の値を求めよ。

(1)　$16^{\log_2 3}=M$ とおく。

左辺は正より，両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 16^{\log_2 3}=\log_2 M$$

$$\log_2 3\cdot\log_2 16=\log_2 M$$

$$4\log_2 3=\log_2 M$$

$$\log_2 3^4=\log_2 M$$

よって　$M=3^4=81$　より　$16^{\log_2 3}=81$

(別解)

$16^{\log_2 3}=2^{4\log_2 3}=2^{\log_2 3^4}=3^4=81$

(2)　$2^x=3^y=12^z$ の各辺は正であるから，各辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 2^x=\log_2 3^y=\log_2 12^z$$

すなわち　$x=y\log_2 3=z\log_2 12$

$xyz\neq 0$　より　$x\neq 0$ かつ $y\neq 0$ かつ $z\neq 0$

よって　$y=\dfrac{x}{\log_2 3}$　より　$\dfrac{1}{y}=\dfrac{\log_2 3}{x}$

$$z=\frac{x}{\log_2 12}=\frac{x}{\log_2(2^2\cdot 3)}=\frac{x}{2+\log_2 3}\quad より\quad \frac{1}{z}=\frac{2+\log_2 3}{x}$$

したがって　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\log_2 3}{x}-\dfrac{2+\log_2 3}{x}=0$

第13講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：9

[解説]

$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{3}{2}} = M$ とおく。

左辺は正より，両辺の 5 を底とする対数をとると

$$\log_5\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{3}{2}} = \log_5 M$$

$$\log_5\frac{3}{2}\cdot\log_5\frac{1}{25} = \log_5 M \quad \text{[A]}$$

$$\log_5\frac{3}{2}\cdot\log_5 5^{-2} = \log_5 M$$

$$-2\log_5\frac{3}{2} = \log_5 M$$

$$\log_5\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \log_5 M$$

よって　$M=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}=\dfrac{4}{9}$

ゆえに　$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{3}{2}} = \mathbf{\dfrac{4}{9}}$

(別解)

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{3}{2}} = (5^{-2})^{\log_5 \frac{3}{2}} = 5^{-2\log_5 \frac{3}{2}}$$

$$= 5^{\log_5\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$$

$$= 5^{\log_5 \frac{4}{9}} = \mathbf{\frac{4}{9}} \quad \text{[B]}$$

[A]　$\log_a M^k = k\log_a M$

[B]　対数の定義
$a>0$，$a\neq1$，$M>0$ のとき
　$a^p = M \Longleftrightarrow p=\log_a M$
より
　$a^{\log_a M} = M$

2 **[正解]** ウ：3

[解説]

$2^x=3^y=5^z=\sqrt[3]{30}$ の各辺は正であるから，各辺の

2 を底とする対数をとると

$$\log_2 2^x=\log_2 3^y=\log_2 5^z=\log_2 \sqrt[3]{30}$$

すなわち

$$x=y\log_2 3=z\log_2 5=\frac{1}{3}\log_2 30$$ [A]

$2^x\neq 1$ かつ $3^y\neq 1$ かつ $5^z\neq 1$ より

$$x\neq 0 \text{ かつ } y\neq 0 \text{ かつ } z\neq 0$$

よって

$$\frac{1}{x}=\frac{3}{\log_2 30}$$

$y=\dfrac{\log_2 30}{3\log_2 3}$ より

$$\frac{1}{y}=\frac{3\log_2 3}{\log_2 30}$$

$z=\dfrac{\log_2 30}{3\log_2 5}$ より

$$\frac{1}{z}=\frac{3\log_2 5}{\log_2 30}$$

したがって

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{\log_2 30}+\frac{3\log_2 3}{\log_2 30}+\frac{3\log_2 5}{\log_2 30}$$

$$=\frac{3(1+\log_2 3+\log_2 5)}{\log_2 30}$$ [C]

[C]　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

$$=\frac{3\log_2 2\cdot 3\cdot 5}{\log_2 30}=\frac{3\log_2 30}{\log_2 30}$$

$$=3$$